

TD 1

Exercice 1. (Matrices symétriques définies positives)

On rappelle que toute matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ symétrique est diagonalisable dans \mathbb{R} . Plus précisément, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ et x_1, \dots, x_n tels que $Ax_i = \lambda_i x_i$ et $x_i \cdot x_j = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On suppose que A est symétrique définie positive. Montrer que les éléments diagonaux de A sont strictement positifs.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On suppose que A est symétrique définie positive. Montrer que l'on peut définir une unique matrice $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.

Exercice 2. (Norme de l'identité)

Soit Id la matrice Identité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute norme induite on a $\|\text{Id}\| = 1$ et que pour toute norme matricielle on a $\|\text{Id}\| \geq 1$.

Exercice 3. (Normes induites particulières)

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, N\}} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

1. On munit \mathbb{R}^N de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que $\|A\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \sum_{j=1}^N |a_{i,j}|$.
2. On munit \mathbb{R}^N de la norme $\|\cdot\|_1$ et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_1$. Montrer que $\|A\|_1 = \max_{j \in \{1, \dots, N\}} \sum_{i=1}^N |a_{i,j}|$.
3. On munit \mathbb{R}^N de la norme $\|\cdot\|_2$ et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_2$. Montrer que $\|A\|_2 = (\rho(A^T A))^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 4. (Rayon spectral)

On munit $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\rho(A) < 1$ si et seulement si $A^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.
2. Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq 1$.
3. Montrer que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} < 1$ implique $\rho(A) < 1$.
4. Montrer que $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$.
5. On suppose ici que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle. Dédurre de la question précédente que $\rho(A) \leq \|A\|$.

Exercice 5. (Rayon spectral)

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Montrer que si A est diagonalisable, il existe une norme induite sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $\rho(A) = \|A\|$. Montrer par un contre-exemple que ceci peut être faux si A n'est pas diagonalisable.

Exercice 6. (Série de Neumann)

Soient $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\rho(A) < 1$ les matrices $\text{Id} - A$ et $\text{Id} + A$ sont inversibles.
2. Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors la série de terme général A^k converge vers $(\text{Id} - A)^{-1}$.